



一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.109/2019.1

編集委員：藤井淳一（委員長）

目次

* 寄稿

* 寄稿

weak Hopf代数の弦表現について

藤井 淳一（大阪教育大学 教育協働学科 理数情報講座）

はじめに

Hopf代数の対合射 (antipode) S は、畳み込み積における恒等射の逆元として、弦表現では

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \circlearrowleft \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \circlearrowright \text{---}$$

で定義されていました (cf.[2])。真ん中の畳み込み積としての単位元は余単位元 ε と単位元 u の合成 $u \circ \varepsilon$ です。これらが等しくならず、両端部分を s_ℓ, s_r として、

$$s_\ell \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \boxed{\ell} \\ | \\ \text{---} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \circlearrowleft \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}, \quad s_r \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \boxed{r} \\ | \\ \text{---} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \circlearrowright \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowright \text{---} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \quad (*)$$

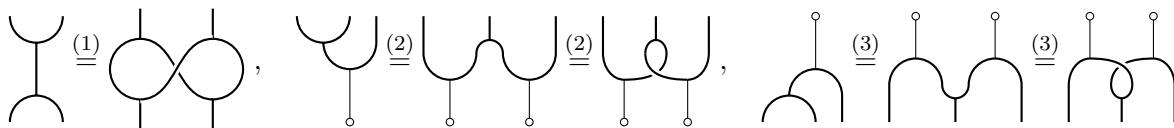
となるのが、weak Hopf代数 (以下 WHA と略) の (弱) 対合射 s です。右側の等式は、通常の対合射なら言えることです。この記号 s_ℓ, s_r は一般的ではありません。例えば、[1] では、 \square^R, \square^L と記されていますし、Schauenburg[6] では、前者は target counital map ε_t 、後者は source counital map ε_s と記述されていて、ざっと見たところ2種類は同じくらい使われているようです。何らかの重要性はあるかもしれませんが、使い心地が悪かったので、 s の位置に合わせ、 s に近い概念としてこの記号を使ってみました。

もともと WHA は、 C^* -環の文脈で、weak quasi-Hopf 代数の代替として Böhm ら [1] によって導入されました。quantum groupoid とも呼ばれています。その上の有限次元左モジュールが作るモノイダル圏が、rigidになるのみならず、詳しくは述べませんが、weak Hopf C^* -環になることまでわかっています。興味深い対象なので、ここでは、弱対合射の反準同型性にいたる入口の部分の弦表現について

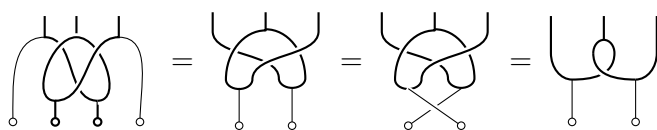
述べます。付録として以前述べた Hopf 代数のモジュールの弦表現 [2] についても少し改善できましたので、合わせて報告します。

1. WHA の定義

弱対合射 s ($*$ が定義) を持つ結合代数・余結合代数 $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ ¹⁾ における WHA の公理系を弦表現で表すと:



となります。(1) は、余積 Δ の準同型性で、上記のように弦表現で表すと、[1] の式からは、以下のように unit の右端となって、一見 unit u と counit ε の性質に対称性がないことのように見えますが、unit の可換性により、両者は一致します:



特に (2),(3) より、 u, ε 同士の可換性も言えます: $\cup = \cap$, $\cap = \cup$.

実際には、交差も逆が順当なので変な感じがしていましたが、通常の braiding と (2),(3) では逆にすべきだと気づきました (あとで、[3] に載っていることがわかりました)。

Hopf 代数との差は対合射にも見られました。実際、片側だけで対合射と同じ条件を満たせば、Hopf 代数になります。他の大きな違いは、余単位元 ε が準同型性を持たないこと (および余積 Δ が、単位元を保存しないこと) です。実際、この条件 (それぞれが) Hopf 代数になる同値条件になっています:

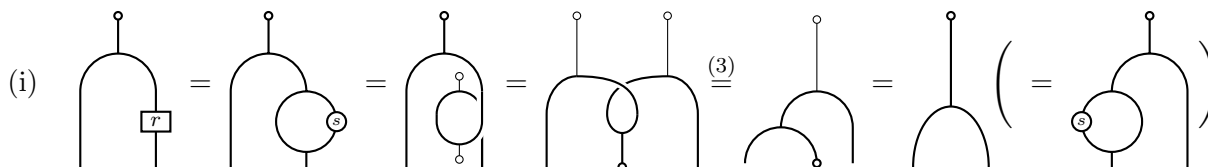
WHA が Hopf 代数になるための同値条件 (以下のいずれでも)

$$\begin{array}{ll}
 1. s_l(x) = u \circ \varepsilon(x) & \boxed{\ell} = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array}, & 2. s_r(x) = u \circ \varepsilon(x) & \boxed{\ell} = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \\
 3. \Delta(u) = u \otimes u & \cup = \begin{array}{c} | \\ | \\ \circ \end{array}, & 4. \varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) & \cap = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array}
 \end{array}$$

2. WHA の様々な性質

ここで細かな性質を列挙していきます。

まず、 $\varepsilon(\text{id} s_r) = \varepsilon(m) (= \varepsilon(s_l \text{id}))$, $(s_l \otimes \text{id})\Delta(u) = \Delta(u) = (\text{id} \otimes s_r)\Delta(u)$:



¹⁾ もちろん、 u, ε は、 $\cup = \begin{array}{c} | \\ | \\ \circ \end{array} = \cup$, $\cap = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} = \cap$ を満たす。(余) 結合性は $\cap = \cap$, $\cup = \cup$

(i) の ε なしバージョン :

(viii) :

これを使うと、(vii') のバリエーション :

(ix) :

ここで、 s_r, s_l の性質を Lemma としておきましょう :

Lemma 1. $s_r \circ s = s_r \circ s_l = s \circ s_l, \quad s_l \circ s = s_l \circ s_r = s \circ s_r.$

Proof. パラレルな等式なので、最初の等式を示せばよい :

□

また、これらの可換性 :

(x) :

その逆バージョン (交差が逆 (σ) になっています) :

(x') :

3. s の反準同型性

この性質は基本的なもので、弦表現で示したいと思ってから証明ができるまでかなりかかってしまいました。元の文献 [1] の証明ではたどれず、ギャップが埋まりませんでした。前章で性質を網羅したつもりだったのですが、基本的な見落としがありました。ただ、[1] には明記されているように思えず、別の [6] で気づきました。しかも、この事実は自らノートで示しており、単に計算ミスで使えていなかったと

いうおまけつきです。その性質は、当初感じていたように、 s_ℓ, s_r は、元の S に近い性質を持つというものです：

Lemma 2. $m(\text{id} \otimes s_\ell)\Delta = m(s_r \otimes \text{id})\Delta = \text{id}$.

Proof. $m(\text{id} \otimes s_\ell)\Delta = \text{circle with } \ell = \text{circle with } \ell \text{ and } s_\ell = \stackrel{(1)}{=} \text{Y-shape} = \text{vertical line} = \text{id}$. □

これでやっとできたと思いましたが、もう一つ山がありました。 s の反準同型性が載っている [1, 5] では全く分からなかったのですが、プレプリント [7] の結果がなかったら、個人的に証明は諦めていたと思います。この結果の証明も少し苦労しました。

Schauenburg's Lemma.

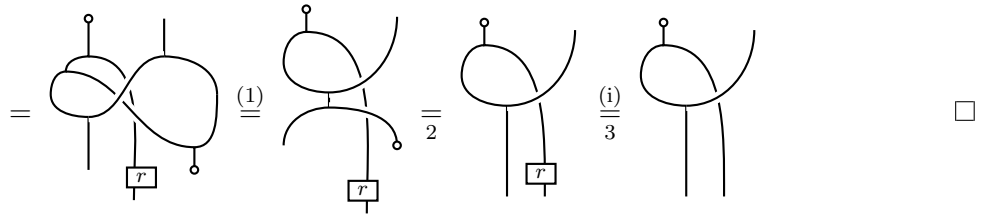
Proof.

【注意】

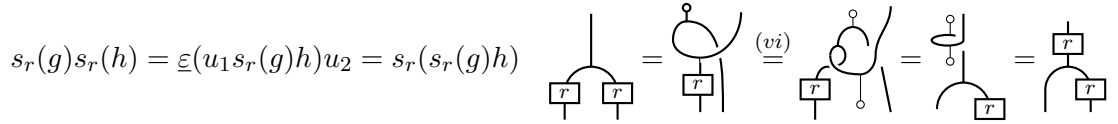
[6] は非常に参考になりますが、残念ながら細かい間違いも多いようです。参考にされる方のためにここで訂正しておきます。たとえば、(4.9) の下の式は、 s_r 型の等式ですが、おそらく以下の形が正しいと思われます。ただし述べられている結果は、例によって Sweedler 表示でシグマ記号が省略されていますが、弦表現をそえていますので、意味は分かると思います。以下の結果は、実際は (viii) で示していますが、違う証明なので再説しておきます（下線部訂正）：

$$gs_r(h) = \underline{\varepsilon}(g_1 s_r(h)_1) g_2 s_r(h) \stackrel{2}{=} \underline{\varepsilon}(g_1 s_r(h)) g_2 \stackrel{3}{=} \underline{\varepsilon}(f g_1 h) g_2.$$

Proof.

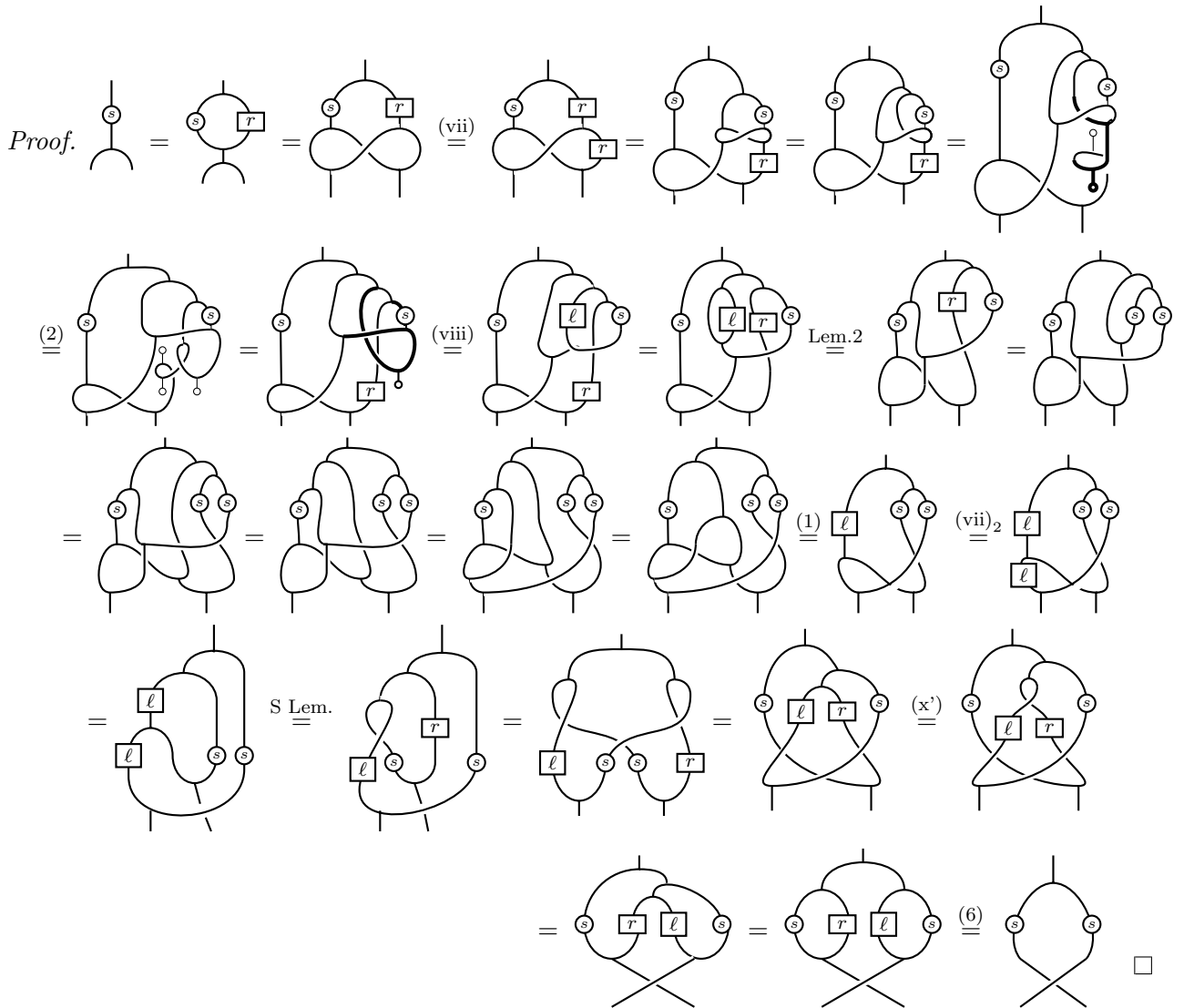


また、(4.10) も違っていました、こちらは (ix) そのものです。




さて、いよいよ反準同型の証明にかかります。

Theorem. s は反準同型: $s(xy) = s(y)s(x)$.



附章. 準三角 Hopf 代数モジュールと braided tensor 圏

以前、[2] の 4 章で準三角 Hopf 代数とそのモジュールの圏が braided になることが同等であることを弦表現で示しましたが、元にした資料が右側モジュールであったため、不完全な記述になっていました。そこで定義をし直すことで完全な記述ができることがわかったので以下に記録します。

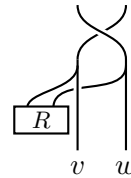
Hopf 代数 A の **Hopf(左) モジュール** M は弦表現として、 のように表現されていますが、上部構造として A が結合的に作用するので、感覚的には、作用は積とさほど変わりません。接合部分の角度で代数の積・余積か module への作用かは判別できるので、今後簡便性のため、接合部分の着色は省略することにします。

左モジュール全体は、自然にモノイダル圏になります (実際には left dual を持つ圏です)。そこでの **braiding** $\sigma_{V,W}$ は、圏論的には次の性質で特徴づけられる自然同型です：

$$\sigma_{U,V \otimes W} = (\text{id} \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \text{id}), \quad \sigma_{U \otimes V,W} = (\sigma_{W,V} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \sigma_{U,W})$$

さて、

$$\sigma_{V,W}(v \otimes w) = \tau^{-1}(R(v \otimes w))$$



と定めた $\sigma_{V,W} = \sigma_{V,W}^R$ を **R -braiding** と呼びます。ここでの目標は次の結果です：

定理. A が準三角 Hopf 代数であることと A -module のなす圏が braided であることは同値である。

Proof. まず、実際上記の braiding の条件を満たしていることを示しておこう。

ここで、 R 行列の準三角条件は、

$$\begin{array}{c} \text{Y-junction} \\ \text{with } R \text{ box} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{23} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Y-junction} \\ \text{with } R \text{ box} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{12} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array}$$

となることを思い出そう。すると、例えば、最初の braiding の式については、上記の後者の関係に注意して、 $\tau = \tau_{U,V \otimes W}$ とすると、 $\sigma_{U,V \otimes W}(u \otimes (v \otimes w)) = \tau^{-1}(R_{A,A \otimes A})(u \otimes (v \otimes w))$ ：

$$\begin{array}{c} \text{Braid } R_{A,A \otimes A} \\ \text{with } R_{A,A \otimes A} \text{ box} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{23} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{12} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{12} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{12} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Braid } R_{13}R_{12} \\ \text{with } R \text{ boxes} \end{array} = (\text{id} \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \text{id})(u \otimes v \otimes w)$$

となって、もう一方も同様に示せるので、braiding の条件を満たしていることがわかる。

ここで、逆に A -module 上に自然同型として braiding $\sigma_{V,W}$ が与えられたとしよう。 $V \cong \text{Hom}(A, V)$ を示す写像 $\bar{v}a = av$ を考える。ただしテンソルを取ったときの作用の弦表現は反対側からなので重なりは複雑になるが、

$$(\bar{v} \otimes \bar{w})(a \otimes b) = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ v \quad w \quad a \quad b \end{array}$$

と上下関係を定めておく。 A での braiding $\sigma_{A,A}$ を

$$\overline{\sigma_{V,W}(v \otimes w)}(a \otimes b) = \sigma_{V,W}(\bar{v} \otimes \bar{w})(a \otimes b) \equiv \tau^{-1}(\bar{v} \otimes \bar{w})\sigma_{A,A}(a \otimes b) = (\bar{w} \otimes \bar{v})\sigma_{A,A}(a \otimes b)$$

となるように定めると、

$$R = \tau_{A,A}\sigma_{A,A}(I \otimes I)$$

で $\sigma_{V,W}$ を定める R 行列ができる。実際 ([7] 修正)、

$$\sigma_{V,W}(v \otimes w) = \sigma_{V,W}(\bar{v} \otimes \bar{w})(I \otimes I) = \tau^{-1}(\bar{v} \otimes \bar{w})\sigma_{A,A}(I \otimes I)$$

$$= \tau^{-1}(\bar{v} \otimes \bar{w})\tau^{-1}R = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ v \quad w \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ R \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ v \quad w \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ R \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ v \quad w \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ R \end{array} = \tau^{-1}(R(v \otimes w))$$

となって、元の braiding の定義と整合的であり、少し前の計算を逆に見ていくと、

$$\begin{aligned} \tau^{-1}((\text{id} \otimes \Delta)R)(u \otimes v \otimes w) &= \sigma_{U,V \otimes W}(u \otimes (v \otimes w)) \\ &= (\text{id} \otimes \sigma_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \text{id})(u \otimes v \otimes w) = \tau^{-1}(R_{13}R_{12})(u \otimes v \otimes w) \end{aligned}$$

より、 $(\text{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$ がわかり、同様に $(\Delta \otimes \text{id})R = R_{13}R_{23}$ も得られる。

一方、 σ の A -線型性により、

$$R\Delta(x) = R(\Delta(x)(I \otimes I)) = \tau\sigma(\Delta(x)I \otimes I) = \tau x \cdot \sigma(I \otimes I) = \tau x \cdot \tau^{-1}R = \tau(\Delta(x) \cdot \tau^{-1}R)$$

となるが、最後の $\Delta(x)$ の左作用 (積 \cdot) を上記同様に弦表現的に下からと解釈すると

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ R \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \Delta(x) \end{array} \dots \rightarrow \text{右辺} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ R \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \Delta(x) \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ R \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \Delta(x) \end{array} = (\tau\Delta(x))R.$$

となって、準余可換性が言えて、 R は普遍 R 行列であることが確かめられた。 \square

おわりに

弦表現に注目してきて、 weak Hopf algebra に手を伸ばしてから、弱対合射の反準同型性を証明するのに思ったよりかかってしまいました。半分諦めかけていたのですが、なんとかできました。出来立て

なので、吟味は不十分かもしれません。また、以前にやった仕事で気にかかっていた部分も修正できました。こちらもそれなりに苦労しましたが、幸運でした。

弦表現は出来上がったら頭を整理するには非常に都合がいいと思います。しかし、描くのは本当に大変です。Hopf 代数の Sweedler 表示は、今回も他論文に記載の結果を補足するために使いましたが、やはり Einstein 縮約のように和のシグマ記号が省かれており、またその変化が見づらいです。

実はあまり指摘されていませんが、Sweedler 表示では表せない利点（欠点かもしれません）があります。項の交換時に braiding σ を使うことになるのですが、 σ なのか σ^{-1} なのかは、Sweedler 表示そのものでは区別が付きません。対称なケース（本当に可換）でない限り、これは本来無視できない部分のほうです。弦表現では、結び目の射影図のように、上下が明示された braiding で表します（これが、弦を書くとき一番苦労する部分です）。今回でいうと、WHA の定義 (2),(3) に現れる braiding は、通常とは逆でない整合的ではありません。Hopf 代数そのものだとあまり問題にならないと思われませんが、今後、私自身が興味を持っている TQC などの量子情報などに深く応用されるようになってくると、この違いが顕在化してくるかもしれません。その意味でも、描くのは確かに面倒くさいですが、統一的に表しておく必要があると考えています。

現在では、弦表現もかなり使われるようになっては来ているのですが、まだまだ統一的にはなっていないように思われます。弦表現を統一的に扱っているテキストを遅ればせながら見つけたので、最後に Turaev らの [8] を紹介して、この稿を閉じます。

参考文献

- [1] G.Böhm, F.Nill and K.Szlachányi, Weak Hopf algebras I. Integral theory and C*-structure, J.Algebra, **221**(1999), 385–438.
- [2] 藤井淳一, 準三角 Hopf モジュールの弦表現, 国際数理学協会会報, 2017, July, No.103.
- [3] M.B.McCurdy, Graphical methods for Tannaka duality of weak bialgebras and weak Hopf algebras, Theory and Appl. of Categories, **26**(2012), 233–280.
- [4] D.Nikshych, On the structure of weak Hopf algebras, Adv. in Math. **170**(2002), 257–286.
- [5] D.Nikshych and L.Vainerman, Finite quantum groupoids and their applications, “New Directions in Hopf algebras”, Math. Sci. Res. Inst. Publ, **43**(2002), 211–262.
- [6] P.Schauenburg, Weak Hopf algebras and quantum groupoids, “Noncommutative geometry and quantum groups” (Warsaw, 2001), 171–188, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003 (arXiv:math/0204180 [math.QA], 2002).
- [7] C.Schweigert, “Hopf algebras, quantum groups and topological field theory”, Lecture Note, 2014/15. <http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws12/hskript.pdf>
- [8] V.Turaev and A.Virelizier, “Monoidal Categories and Topological Field Theory”, Birkhäuser; 1st ed. 2017.
- [9] L-Y. Zhang, The structure theorems of weak Hopf algebras, Commun. in Alg., **38**(2010), 1269–1281.